



TITLE:

反応拡散系に現れる微細なパターンとYoung測度(非線形数理 冬の学校,講義ノート)

AUTHOR(S):

大下, 承民

CITATION:

大下, 承民. 反応拡散系に現れる微細なパターンとYoung測度(非線形数理 冬の学校,講義ノート). 物性研究 2005, 84(1): 79-96

ISSUE DATE:

2005-04-20

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/110157>

RIGHT:

反応拡散系に現れる微細なパターンと Young 測度

大下 承民

東京大学大学院数理科学研究科

1 序

本稿では, FitzHugh-Nagumo 方程式

$$\begin{aligned}
 \text{(FH-N)} \quad & u_t = \varepsilon^2 \Delta u - F'(u) - v \quad \text{in } \Omega \times \mathbb{R}^+, \\
 & \tau v_t = \Delta v + u - \gamma v - m \quad \text{in } \Omega \times \mathbb{R}^+, \\
 & \frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial v}{\partial n} = 0 \quad \text{on } \partial\Omega \times \mathbb{R}^+,
 \end{aligned}$$

または, Cahn-Hilliard-Oono 方程式

$$\begin{aligned}
 \text{(1.1a)} \quad & u_t = -\Delta(\varepsilon^2 \Delta u - F'(u)) - (u - m) \quad \text{in } \Omega \times \mathbb{R}^+, \\
 \text{(1.1b)} \quad & \frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial(\Delta u)}{\partial n} = 0 \quad \text{on } \partial\Omega \times \mathbb{R}^+, \\
 \text{(1.1c)} \quad & \bar{u}(t) = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} u(x, t) dx = m \quad \text{for } t \geq 0
 \end{aligned}$$

の定常問題を考察する. 但し, $\tau, \varepsilon, \gamma > 0$ は定数, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ($N \geq 1$) は滑らかな境界をもつ有界領域, $\partial/\partial n$ は外向き法微分, m は定数, F は関数で

- (A) $m \in (0, 1)$;
 (F1) $F \in C^3(\mathbb{R})$, $F(0) = F(1) = 0 < F(s) \forall s \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$, $F''(0)F''(1) \neq 0$.

を満たすとする.

(FH-N) 方程式は u, v を 2 種の物質 U, V の濃度を表す変数とみたとき, BZ 反応のような化学反応に現れる空間パターンの特徴を数値シミュレーションによって

再現することができる*¹。また、Cahn-Hilliard-Oono 方程式は、2 種の高分子鎖が連結した高分子共重合体*²の相分離問題のモデルとして知られている。これらの非線形反応拡散方程式においては、ある条件下で複雑多様な構造をもった空間パターンが出現する。

ここでは、 ε を 0 にする特異極限問題を考える。これは、生物の形態形成の観点*³からも重要なパラメーター範囲である。 $F'(u)$ のような双安定非線形項をもつ場合にこの特異極限を考えたとき、次のような相分離パターンが現れることが多い。すなわち、領域は、 u が 1 に近い領域 Ω_1 と 0 に近い領域 Ω_0 の 2 つの相領域に分かれ、その残りの領域が薄い層 (遷移層) となったパターンである。極限では、遷移層の幅は 0 に近づき、一般に界面と呼ばれる領域内部の不連続面が生じる。これについては、類似の方程式で多くの研究がある*⁴。これまでの研究の多くは粗いスケールのおとなしいパターンが中心だった。しかしながら、ある種のスケーリングにおいては解がずっと複雑になることが数値シミュレーションによって確認されている。振動の激しさが増していく、一種の「微細な構造をもったパターン」である。

本稿では、微細パターンの局所振動の様子を“ヤング測度”で表現する。次に、空間次元が 2 以下の場合に、微細パターンの構造について調べる。

2 1 次元 Cahn-Hilliard-Oono 方程式の場合

$u = u(x, t)$ が (1.1a), (1.1b) を満たすとき、 \bar{u} は $\bar{u}_t = -(\bar{u} - m)$ を満たすから、 \bar{u} は m に指数的に早く収束する。ここでは $\bar{u} = m$ の場合を考える。

$f(u) = F'(u)$ とおく。 $N = 1, \Omega = (0, \ell)$ のとき (1.1a-1.1c) は

$$(2.1) \quad u_t = -(\varepsilon^2 u_{xx} - f(u))_{xx} - (u - m) \quad \text{in } x \in (0, \ell), \quad t > 0$$

$$(2.2) \quad u_x(x, t) = u_{xxx}(x, t) = 0 \quad \text{for } x \in \{0, \ell\}, \quad t \geq 0$$

$$(2.3) \quad \bar{u} = \frac{1}{\ell} \int_0^\ell u \, dx = m \quad \text{for } t \geq 0$$

となる。

$w = w(x, t)$ を

$$(2.4) \quad \begin{cases} w_t = -(\varepsilon^2 w_{xxx} + f(m - w))_x - w & \text{in } x \in (0, \ell), \quad t > 0 \\ w(x, t) = w_{xx}(x, t) = 0 & \text{for } x \in \{0, \ell\}, \quad t \geq 0 \end{cases}$$

*¹ FitzHugh-Nagumo 方程式のパターンについては、[2, 14, 21] を参照。

*² 実験 [19], モデリング [3, 22, 33], 概説 [4, 18], 数理解析は最初に [30], その後 [10, 11, 13, 16, 20, 32, 37, 38, 39] にある。

*³ 均一な状態が拡散によって不安定化して周期構造が現れるという拡散誘導不安定性が、生物の斑点や縞模様を形成するという考え方

*⁴ [5, 6, 7, 8, 15, 17, 23, 28, 31, 35, 41, 42, 43] を参照。

の解とするとき, $u = m - w_x$ は (2.1-2.3) の解である.

汎関数

$$\mathbf{G}_{\varepsilon,\ell}(w) = \int_0^\ell \frac{\varepsilon^2}{2} (w_{xx})^2 + F(m - w_x) + \frac{1}{2} w^2 dx, \quad w \in H^2(0, \ell) \cap H_0^1(0, \ell)$$

を定義する.

命題 1 w を (2.4) の解とするとき,

$$\frac{d}{dt} \mathbf{G}_{\varepsilon,\ell}(w) = - \int_0^\ell (w_t)^2 dx \leq 0$$

が成立. 各 $\varepsilon, \ell > 0$ に対して

$$\mathbf{G}_{\varepsilon,\ell}(w_{\varepsilon,\ell}) = \inf_{w \in H^2(0,\ell) \cap H_0^1(0,\ell)} \mathbf{G}_{\varepsilon,\ell}(w)$$

を満たす $w_{\varepsilon,\ell} \in H^2(0, \ell) \cap H_0^1(0, \ell)$ が存在する. また, $w_{\varepsilon,\ell}$ は (2.4) の定常解である.

2.1 スケール変換

$\ell > 0$ を固定して極限 $\varepsilon \rightarrow 0$ での $w_{\varepsilon,\ell}$ の振る舞いを調べたい. 次のような変数変換

$$x = \ell y, \quad y \in (0, 1)$$

$$\delta = \frac{\varepsilon}{\ell}, \quad \ell = L\varepsilon^{1/3}$$

$$W(y) = \frac{1}{\ell} w(\ell y), \quad \mathbf{G}_{\varepsilon,\ell}(w) = \varepsilon \Phi_{\delta,L}(W)$$

を行うと,

$$\Phi_{\delta,L}(W) = \int_0^1 \frac{\delta}{2} (W_{yy})^2 + \frac{1}{\delta} F(m - W_y) + \frac{L^3}{2} W^2 dy$$

となることが容易に分かる. まず, $L > 0$ を固定して極限 $\delta \rightarrow 0$ を考察することにより, $\varepsilon \rightarrow 0$ (ℓ : 固定) のとき何が起こるかを推測することにしよう.

2.2 $\Phi_{\delta,L}$ の Γ -極限

$F(m - W_y)$ を小さくするために, $W_y \sim m$ または $m - 1$ でなければならない.

$[0, 1]$ 全体で $W_y \sim m$ または $W_y \sim m - 1$ は, W の境界条件 $W(0) = W(1) = 0$ を満たさない. そこで, W_y が $m - 1$ と m の間を遷移する領域が存在するはずである. 遷移層の幅は δ スケールである ([6] 参照). 実際, 遷移層の近くで $W_y(y) \sim m - Q(\pm(y - z)/\delta)$, ここで z は遷移層の位置, Q は

$$(2.5) \quad \begin{cases} \ddot{Q}(\xi) - f(Q(\xi)) = 0, & \forall \xi \in \mathbb{R}, \\ Q(-\infty) = 0, \quad Q(\infty) = 1, \quad \int_{\mathbb{R}} \xi \dot{Q}(\xi) d\xi = 0 \end{cases}$$

の一意解である．最後の式は正規化条件であり，

$$(2.6) \quad \int_{-\infty}^0 Q = \int_0^{\infty} (1-Q) \iff \int_0^{Q(0)} \frac{s}{\sqrt{2F(s)}} ds = \int_{Q(0)}^1 \frac{1-s}{\sqrt{2F(s)}} ds$$

と同値である．各遷移層に対して $\frac{\delta}{2}(W_{yy})^2 + \frac{1}{\delta}F(m-W_y)$ の積分は，およそ $\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{2}(\dot{Q})^2 + F(Q) d\xi = \sigma$,

$$\sigma := \int_0^1 \sqrt{2F(s)} ds$$

と近似できる．

極限 $\delta \rightarrow 0$ では遷移層の幅は 0 に近づき界面とよばれる “不連続点”が生じる．次の (W1), (W2) を満たす $W = W(y)$ 全体の集合を $\mathcal{S}_k \subset W_0^{1,1}(0,1)$ とする．界面を k 個もつ関数のクラスである．

(W1) $W \in W_0^{1,1}(0,1)$ は連続折れ線関数, $W(0) = W(1) = 0$.

(W2) W_y は $[0,1] \setminus \{y_i\}_{i=1}^n$ ($0 < y_1 < y_2 < \dots < y_k < 1$) 内で m と $m-1$ を交互にとる．

汎関数 $\Phi_{0,L} : W_0^{1,1}(0,1) \rightarrow [0, \infty]$ を $W \in \mathcal{S}_k$ のとき,

$$\Phi_{0,L}(W) = k\sigma + \frac{L^3}{2} \int_0^1 W^2 dy, \quad \sigma = \int_0^1 \sqrt{2F(s)} ds$$

とし, $W \in W_0^{1,1}(0,1) \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} \mathcal{S}_k$ のとき, $\Phi_{0,L}(W) = \infty$ と定義する．

$\Phi_{0,L}$ と $\Phi_{\delta,L}$ ($\delta \rightarrow 0$) の関係について, 「 Γ -極限」を利用した厳密な定式化が Modica-Mortola の結果 [25] から得られる (Γ -極限の概念を利用するために $\Phi_{0,L}$ と $\Phi_{\delta,L}$ の定義域を共通の $W_0^{1,1}(0,1)$ にする必要がある． $W \in W_0^{1,1}(0,1) \setminus H^2(0,1)$ に対して $\Phi_{\delta,L}(W) = \infty$ として, $\Phi_{\delta,L}$ を $W_0^{1,1}(0,1)$ 全体へ拡張しておく．そうすると $W_0^{1,1}(0,1)$ 上の汎関数として Γ -極限を議論できる.)

2.3 Minimizers of $\Phi_{0,L}$

$L \geq 0$ を固定して $\Phi_{0,L}$ の minimizer を求めよう． $W \in \mathcal{S}_k$ が

$$W(y) = \begin{cases} a_0 y & y \in [0, y_1] \\ a_i(y - \frac{y_i + y_{i+1}}{2}) + p_i & y \in [y_i, y_{i+1}], 1 \leq i \leq k-1 \\ a_k(y-1) & y \in [y_k, 1] \end{cases}$$

を満たすとする．ここで, a_i ($0 \leq i \leq k$) は, $m > 0$ と $m-1 < 0$ を交互にとるとする． $W(0) = W(1) = 0$, $W(\frac{y_i + y_{i+1}}{2}) = p_i$ ($1 \leq i \leq k-1$) に注意する． $y_0 = 0, y_{k+1} = 1$,

$h_i = y_{i+1} - y_i$ ($0 \leq i \leq k$) とおく. $1 \leq i \leq k-1$ に対して

$$\begin{aligned} \int_{y_i}^{y_{i+1}} W^2(y) dy &= \int_{-h_i/2}^{h_i/2} (a_i s + p_i)^2 ds \\ &= 2 \int_0^{h_i/2} (a_i^2 s^2 + p_i^2) ds \\ &= \frac{a_i^2 h_i^3}{12} + p_i^2 h_i. \end{aligned}$$

また m と $1-m$ の調和平均を $\alpha (= 2m(1-m))$ とすると

$$\frac{1}{2|a_i|} + \frac{1}{2|a_{i+1}|} = \frac{1}{\alpha}, \quad 0 \leq i \leq k-1$$

だから,

$$\begin{aligned} \int_0^1 W^2(y) dy &= \frac{a_0^2 h_0^3}{3} + \sum_{i=1}^{k-1} \frac{a_i^2 h_i^3}{12} + \frac{a_k^2 h_k^3}{3} + \sum_{i=1}^{k-1} p_i^2 h_i \\ &= \frac{1}{12} \left\{ \frac{1}{2|a_0|} (2|a_0| h_0)^3 + \sum_{i=1}^{k-1} \frac{1}{|a_i|} (|a_i| h_i)^3 + \frac{1}{2|a_k|} (2|a_k| h_k)^3 \right\} + \sum_{i=1}^{k-1} p_i^2 h_i \\ (2.7) \quad &\geq \frac{1}{12} \left(h_0 + \sum_{i=1}^{k-1} h_i + h_k \right)^3 / \left(\frac{1}{2|a_0|} + \sum_{i=1}^{k-1} \frac{1}{|a_i|} + \frac{1}{2|a_k|} \right)^2 \\ &= \frac{1}{12} \left(\sum_{i=0}^k h_i \right)^3 / \left\{ \sum_{i=0}^{k-1} \left(\frac{1}{2|a_i|} + \frac{1}{2|a_{i+1}|} \right) \right\}^2 = \frac{\alpha^2}{12k^2}. \end{aligned}$$

ここで, 不等式

$$\sum \theta_i \lambda_i^3 \geq \frac{(\sum \theta_i \lambda_i)^3}{(\sum \theta_i)^2}$$

を使った. また, (2.7) の等号成立は, $p_i = 0$ ($1 \leq i \leq k-1$), $2|a_0|h_0 = |a_1|h_1 = \cdots = |a_{k-1}|h_{k-1} = 2|a_k|h_k = \alpha/k$ のときであり, これは $a_0 = m$ か $a_0 = m-1$ に応じて 2 つの場合がある. $a_0 = m$ の場合を $W = W_k^+$, $a_0 = m-1$ の場合を $W = W_k^-$ とおく. W_k^\pm は半周期 $1/k$ をもつ関数である. すなわち $[0, 1/k]$ に制限したものを対称に折り返して周期拡張したものと一致する.

$$\mu = \frac{L}{L^*}, \quad L^* = \left(\frac{12\sigma}{\alpha^2} \right)^{1/3}$$

とおくと, 各 $k = 1, 2, \dots$ に対して,

$$\Phi_{0,L}(W_k^\pm) = \sigma \left(k + \frac{\mu^3}{2k^2} \right).$$

この右辺を $\mathcal{E}(k, \mu)$ とおく.

$$\mu_k = \left(k + \frac{1}{2}\right) \left(\frac{k^2 + k}{k^2 + k + 1/4}\right)^{2/3}, \quad k = 1, 2, \dots$$

に対して, $\mu = \mu_k$ のとき $\mathcal{E}(k, \mu) = \mathcal{E}(k+1, \mu)$, $\mu < \mu_k$ のとき $\mathcal{E}(k, \mu) < \mathcal{E}(k+1, \mu)$, $\mu > \mu_k$ のとき $\mathcal{E}(k, \mu) > \mathcal{E}(k+1, \mu)$ である. また,

$$\mu_k \in (k, k+1), \quad k = 1, 2, \dots$$

に注意する. $\mu_0 = 0$ として, 次がわかった.

命題 2 (i) $\Phi_{0,0}$ の minimizer は W_1^\pm .

(ii) $\mu = L/L^* \in (\mu_{n-1}, \mu_n)$, $n \geq 1$ のとき, $\Phi_{0,L}$ の minimizer は W_n^\pm .

(iii) $\mu = L/L^* = \mu_n$, $n \geq 1$ のとき, $\Phi_{0,L}$ の minimizer は W_n^\pm, W_{n+1}^\pm .

$\ell > 0$ を固定して極限 $\varepsilon \rightarrow 0$ を考えるのが, 本来の目的であった. $L/L^* \in (\mu_{n-1}, \mu_n]$ となる n に対して $w_{\varepsilon,\ell}(x)$ が $W_n^\pm(x/\ell)$ と同じ周期 $2\ell/n$ をもつと仮定すると, その周期は $4L^*\varepsilon^{1/3}/\sqrt[3]{3}$ を超えないことがわかる. 従って, $\varepsilon \rightarrow 0$ (ℓ : 固定) のとき $w_{\varepsilon,\ell}$ が激しく振動していくことが予想される.

3 微細構造パターン

以後 $\gamma \geq 0$ を非負の定数として, (1.1a)–(1.1c) の定常問題 ($\gamma = 0$ のとき) と (FH-N) の定常問題 ($\gamma > 0$ のとき) を統合して考察する.

3.1 汎関数

本節では汎関数を定義する. まず

$$\mathbf{K} = \{(u, v) \in (H^1(\Omega))^2 \mid -\Delta v + \gamma v = u - m \text{ in } \Omega, \quad \frac{\partial v}{\partial n} = 0 \text{ on } \partial\Omega\}$$

とおく. $\gamma > 0$ のとき, 各 $u \in H^1(\Omega)$ に対して $(u, v) \in \mathbf{K}$ となる v は一意に定まるので, 汎関数

$$(3.1) \quad \mathbf{E}(u, \varepsilon) = \int_{\Omega} \left\{ \frac{\varepsilon^2}{2} |\nabla u|^2 + F(u) + \frac{1}{2}(\gamma v^2 + |\nabla v|^2) \right\} dx, \quad (u, v) \in \mathbf{K}$$

が定義できる. $\gamma = 0$ のときも $\mathbf{E}(\cdot, \varepsilon)$ は $\{u \in H^1(\Omega) \mid \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} u = m\}$ 上で well-defined である.

\mathbf{E} のオイラー・ラグランジュ方程式は, $\gamma > 0$ のとき

$$(3.2) \quad \begin{cases} \varepsilon^2 \Delta u - F'(u) - v = 0 & \text{in } \Omega, \\ \Delta v - \gamma v + u - m = 0 & \text{in } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial v}{\partial n} = 0 & \text{on } \partial\Omega. \end{cases}$$

また $\gamma = 0$ のときは, 制約条件 $\frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} u = m$ からくるラグランジュの未定乗数を λ として

$$(3.3) \quad \begin{cases} \varepsilon^2 \Delta u - F'(u) - v = \lambda & \text{in } \Omega, \\ \Delta v + u - m = 0 & \text{in } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial v}{\partial n} = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

となり, (1.1a)–(1.1c) の定常問題と一致する.

注意

$$\mathbf{I}(u, v, \varepsilon) = \int_{\Omega} \left\{ \frac{\varepsilon^2}{2} |\nabla u|^2 - \frac{1}{2} |\nabla v|^2 + F(u) + uv - \frac{\gamma}{2} v^2 - mv \right\} dx$$

とおく. u, v を独立に考えたときの \mathbf{I} のオイラー・ラグランジュ方程式も (3.2) となる.

$$(u, v) \in \mathbf{K} \implies \mathbf{I}(u, v, \varepsilon) = \mathbf{E}(u, \varepsilon)$$

がわかる. なぜなら $(u, v) \in \mathbf{K}$ のとき, $-\Delta v + \gamma v = u - m$ の両辺に v をかけて, Ω 上積分すると,

$$\int_{\Omega} |\nabla v|^2 + \gamma v^2 dx = \int_{\Omega} (u - m)v dx$$

だからである.

3.2 微細パターン

$\mathbf{E}(\cdot, \varepsilon)$ は, H^1 -ノルムに関して弱下半連続であり, コアーシブでもあるので, 各 $\varepsilon > 0$ に対して,

$$(3.4) \quad \mathbf{E}(u^\varepsilon, \varepsilon) = \inf_{(u, v) \in \mathbf{K}} \mathbf{E}(u, \varepsilon), \quad (u^\varepsilon, v^\varepsilon) \in \mathbf{K}$$

を満たす関数 $(u^\varepsilon, v^\varepsilon) \in \mathbf{K}$ が存在する.

本節では, u^ε は $\varepsilon \rightarrow 0$ のとき 0 と 1 の間を激しく振動し, その局所平均は m に近づくことを示す. 次の結果が成立する.

定理 1 (A), (F1) および

(F2) ある定数 $C_1, C_2 > 0$ に対して, $F(s) \geq C_1 s^2 - C_2$ for all $s \in \mathbb{R}$.

を仮定する. $(u^\varepsilon, v^\varepsilon)$ を (3.4) の解とするととき次が成立.

- (i) 連続関数 $h \in C(\mathbb{R})$ に対して, $\{h(u^\varepsilon)\}$ が $\varepsilon \searrow 0$ のとき $L^1(\Omega)$ で弱収束するならば, 弱極限は関数

$$\bar{h}(x) = (1 - m)h(0) + mh(1)$$

である.

- (ii) 任意の $h \in C_0(\mathbb{R}) := \left\{ \rho \in C(\mathbb{R}) \mid \lim_{|s| \rightarrow \infty} \rho(s) = 0 \right\}$ に対して, $\varepsilon \searrow 0$ のとき

$$h(u^\varepsilon) \xrightarrow{*} \bar{h}(x) = (1 - g(x))h(0) + g(x)h(1) \quad \text{weak } * \text{ in } L^\infty(\Omega)$$

である.

注意 $h \in C_0(\mathbb{R})$ のとき, $\bar{h}(x) = \int_{\mathbb{R}} h(\lambda) d\mu(\lambda)$ とかける. 但し,

$$\mu = (1 - m)\delta_0 + m\delta_1$$

は \mathbb{R} 上の確率測度である. 族 $\nu = \{\mu\}_{x \in \Omega}$ は, $\varepsilon \rightarrow 0$ のとき u^ε が生成するヤング測度と呼ばれる. これは, 各 x の近くで u^ε がある特定の値をとる確率の極限である. 今の場合, x の近くでランダムに点を選んだときの $\{u^\varepsilon\}$ の値の確率分布は, 極限においては, 0 をとる確率が $1 - m$, 1 をとる確率が m , それ以外の値をとる確率が 0 ということである. これは直感的には次のことを示している. $\varepsilon \rightarrow 0$ のとき, u^ε は, 0 または 1 の近くに値をとりつつ, その局所平均は m に近づく. そのため, u^ε は 0 と 1 の間を激しく振動していく.

定理 1 の証明: まず, 次を示す.

補題 1 $\lim_{\varepsilon \searrow 0} \mathbf{E}(u^\varepsilon, \varepsilon) = 0$.

証明.

$$\hat{u}_\varepsilon(x) = q_\varepsilon(x_1), \quad x = (x_1, \dots, x_n) \in \Omega$$

とおく. 但し,

$$q_\varepsilon(\eta) = Q(\varepsilon^{-2/3} \rho(\varepsilon^{-1/3} \eta)), \quad \eta \in \mathbb{R}$$

$$\rho(s) = m - \left| s - 2 \left[\frac{s}{2} \right] - 1 \right|, \quad s \in \mathbb{R}$$

Q は (2.5) の解, $[s]$ は s を超えない最大の整数である. (2.6) を使うと

$$\begin{aligned}
\int_0^{\varepsilon^{1/3}} q_\varepsilon - m\varepsilon^{1/3} &= \int_0^{\varepsilon^{1/3}} q_\varepsilon - \int_{(1-m)\varepsilon^{1/3}}^{\varepsilon^{1/3}} 1 \\
&= \varepsilon \left\{ \int_{-(1-m)/\varepsilon^{2/3}}^0 Q(\xi) d\xi - \int_0^{m/\varepsilon^{2/3}} (1 - Q(\xi)) d\xi \right\} \\
&= \varepsilon \left\{ - \int_{-\infty}^{-(1-m)/\varepsilon^{2/3}} Q(\xi) d\xi + \int_{m/\varepsilon^{2/3}}^{\infty} (1 - Q(\xi)) d\xi \right\} \\
&= \mathcal{O}(\exp(-c/\varepsilon^{2/3})).
\end{aligned}$$

故に $\lim_{\varepsilon \searrow 0} \frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega \hat{u}_\varepsilon = m$. ここで

$$u_\varepsilon^* = \hat{u}_\varepsilon - \left(\frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega u_\varepsilon - m \right)$$

とおく.

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \frac{\varepsilon^2}{2} |\nabla \hat{u}_\varepsilon|^2 + F(\hat{u}_\varepsilon) dx &= \mathcal{O}(\varepsilon^{-1/3}) \left\{ \int_0^{\varepsilon^{1/3}} \frac{\varepsilon^2}{2} (q'_\varepsilon)^2 + F(q_\varepsilon) d\eta \right\} \\
&= \mathcal{O}(\varepsilon^{2/3}) \int_{-(1-m)/\varepsilon^{2/3}}^{m/\varepsilon^{2/3}} \frac{1}{2} \dot{Q}^2 + F(Q) d\xi = \mathcal{O}(\varepsilon^{2/3})
\end{aligned}$$

より

$$(3.5) \quad \limsup_{\varepsilon \searrow 0} \int_\Omega \frac{\varepsilon^2}{2} |\nabla u_\varepsilon^*|^2 + F(u_\varepsilon^*) dx = \limsup_{\varepsilon \searrow 0} \int_\Omega \frac{\varepsilon^2}{2} |\nabla \hat{u}_\varepsilon|^2 + F(\hat{u}_\varepsilon) dx = 0.$$

$\gamma = 0$ のときは $\frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega u_\varepsilon^* = m$ に注意して, $(u_\varepsilon^*, v_\varepsilon^*) \in \mathbf{K}$ となる v_ε^* をとる. $u_\varepsilon^* \rightharpoonup m$ weakly in L^2 と $-\Delta + \gamma$ のグリーン作用素のコンパクト性より,

$$(3.6) \quad \lim_{\varepsilon \searrow 0} \int_\Omega \frac{1}{2} (|\nabla v_\varepsilon^*|^2 + \gamma (v_\varepsilon^*)^2) dx = 0.$$

よって, (3.4), (3.5), (3.6) より

$$0 \leq \limsup_{\varepsilon \searrow 0} \mathbf{E}(u^\varepsilon, \varepsilon) \leq \limsup_{\varepsilon \searrow 0} \mathbf{E}(u_\varepsilon^*, \varepsilon) = 0$$

がわかる. \square

ヤング測度の生成定理を思い出そう.

命題 3 [36, Theorem 6.2] $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ を可測集合, $z_j : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ を

$$\sup_j \int_\Omega g(|z_j|) dx < \infty$$

を満たす可測関数とする。但し、 $g : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty]$ は $\lim_{t \rightarrow \infty} g(t) = \infty$ を満たす連続非減少関数である。このとき、ある部分列 $\{z_{j_n}\}$ と \mathbb{R}^m 上の確率測度の族 $\nu = \{\nu_x\}_{x \in \Omega}$ で次の性質をもつものが存在する。

(P) 任意の Carathéodory 関数^{*5} $\psi(x, \lambda) : \Omega \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ に対して、 $\{\psi(x, z_{j_n}(x))\}$ が $L^1(\Omega)$ で弱収束するならば、弱極限は関数

$$\bar{\psi}(x) = \int_{\mathbb{R}^m} \psi(x, \lambda) d\mu_x(\lambda)$$

である。

定理 1 の証明の続き (1) が成立しないと仮定すると、関数 $h \in C(\mathbb{R})$, $\varphi \in L^\infty(\Omega)$, 数列 $\varepsilon_n \searrow 0$, 定数 $\delta > 0$ があって、 $\{h(u^{\varepsilon_n})\}$ は $L^1(\Omega)$ で弱収束し、

$$(3.7) \quad \left| \int_{\Omega} \varphi(x) h(u^{\varepsilon_n}) dx - \int_{\Omega} \varphi \bar{h} dx \right| \geq \delta \quad \text{for all } n \geq 1$$

を満たす。仮定 (F2) : $F(u) \geq C_1 u^2 - C_2$ と (3.1) より、

$$(3.8) \quad C_1 \|u^{\varepsilon_n}\|_{L^2}^2 \leq \int_{\Omega} F(u^{\varepsilon_n}) dx + C_2 |\Omega| \leq \mathbf{E}(u^{\varepsilon_n}, \varepsilon_n) + C_2 |\Omega| < \infty$$

なので、 $\{u^{\varepsilon_n}\}$ は $L^2(\Omega)$ で弱収束しているとしてよい。 $u^{\varepsilon_n} \rightharpoonup u$ weak in $L^2(\Omega)$ とし、 $(u, v) \in \mathbf{K}$ となる関数 v をとる。 $-\Delta + \gamma$ のグリーン作用素のコンパクト性と (3.1) より

$$0 \leq \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla v|^2 + \gamma v^2 dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla v^{\varepsilon_n}|^2 + \gamma (v^{\varepsilon_n})^2 dx \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{E}(u^{\varepsilon_n}, \varepsilon_n) = 0.$$

したがって $v \equiv 0$, $u^{\varepsilon_n} \rightharpoonup u \equiv m$ weak in $L^2(\Omega)$ がわかる。また、

$$0 \leq \left\| \sqrt{F(u^{\varepsilon_n})} \right\|_{L^2}^2 = \int_{\Omega} F(u^{\varepsilon_n}) dx \leq \mathbf{E}(u^{\varepsilon_n}, \varepsilon_n) \rightarrow 0$$

に注意する。ここで、(3.8) と命題 3 から、 $\{u^{\varepsilon_n}\}$ が性質 (P) を満たす確率測度の族 $\nu = \{\nu_x\}_{x \in \Omega}$ を生成しているとしてよい。特に、

$$\begin{aligned} u^{\varepsilon_n} \rightharpoonup m &= \int_{\mathbb{R}} \lambda d\nu_x(\lambda) \quad \text{weak in } L^2(\Omega), \\ \sqrt{F(u^{\varepsilon_n})} &\rightarrow 0 = \int_{\mathbb{R}} \sqrt{F(\lambda)} d\nu_x(\lambda) \quad \text{in } L^2(\Omega) \end{aligned}$$

が成立。 $\int_{\mathbb{R}} \sqrt{F(\lambda)} d\nu_x(\lambda) = 0$ は、確率測度 ν_x が \sqrt{F} の零点 $\lambda = 0$ と $\lambda = 1$ に集中していることを意味しているので、

$$\nu_x = (1 - \theta(x))\delta_0 + \theta(x)\delta_1, \quad \theta(x) \in [0, 1]$$

^{*5} $x \in \Omega$ について可測、 $\lambda \in \mathbb{R}^m$ について連続な関数 $\psi(x, \lambda)$

とかける. よって, $m = \int_{\mathbb{R}} \lambda d\nu_x(\lambda) = \theta(x)$ となり, $h(u^{\varepsilon_n}) \rightharpoonup \bar{h}$ weak in $L^1(\Omega)$ がわかる. これは (3.7) に矛盾. よって (1) が示された.

(2) が成立しないと仮定すると, 関数 $h \in C_0(\mathbb{R})$, $\varphi \in L^1(\Omega)$, 数列 $\varepsilon_n \searrow 0$, 定数 $\delta > 0$ があって,

$$(3.9) \quad \left| \int_{\Omega} \varphi(x) h(u^{\varepsilon_n}) dx - \int_{\Omega} \varphi \bar{h} dx \right| \geq \delta \quad \text{for all } n \geq 1$$

を満たす. $\|h(u^{\varepsilon_n})\|_{L^\infty} \leq \|h\|_{L^\infty(\mathbb{R})} < \infty$ より, $h(u^{\varepsilon_n})$ は $L^\infty(\Omega)$ で汎弱収束, $L^1(\Omega)$ で弱収束していると仮定してよい. (1) より,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \varphi(x) h(u^{\varepsilon_n}) dx = \int_{\Omega} \varphi \bar{h} dx$$

となり, これは (3.9) に矛盾. よって (2) が示された. \square

3.3 補足

(3.1) で形式的に $\varepsilon = 0$ とおいて, 汎関数

$$\mathbf{E}_0(u) = \int_{\Omega} F(u) + \frac{1}{2}(\gamma v^2 + |\nabla v|^2) dx, \quad (u, v) \in \mathbf{K}$$

を定義する. $0 \leq \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbf{E}_0(u^\varepsilon) \leq \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbf{E}(u^\varepsilon, \varepsilon) = 0$ より \mathbf{E}_0 の下限は 0 であるが, これは達成されない. なぜなら $\mathbf{E}_0(u) = 0$ ならば, $v \equiv 0$ よって $u \equiv m$ でなければならない. このとき $\mathbf{E}_0(u) = \int_{\Omega} F(u) = |\Omega| F(m) > 0$ となり矛盾である. $N=1, \gamma=0, m=1/2, F(s) = s^2(s^2-1)^2$ とすると, Weierstrass が与えた「minimizer を持たない最小問題」の例とよく似ている.

\mathbf{E}_0 の定義域を, ヤング測度 $\nu = \{\nu_x\}_{x \in \Omega}$ の全体へ拡張する.

$$\tilde{\mathbf{E}}_0(\nu) = \int_{\Omega} \left\{ \int_{\mathbb{R}} F(\lambda) d\nu_x(\lambda) + \frac{1}{2}(\gamma v^2 + |\nabla v|^2) \right\} dx, \quad \nu = \{\nu_x\}_{x \in \Omega}$$

とおく. ここで, $v = v(x)$ は $u(x) = \int_{\mathbb{R}} \lambda d\nu_x(\lambda)$ に対して

$$-\Delta v + \gamma v = u - m \text{ in } \Omega, \quad \frac{\partial v}{\partial n} = 0 \text{ on } \partial\Omega$$

を満たすとする. ここでも, $\gamma=0$ の場合は制約条件 $\frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} \int_{\mathbb{R}} \lambda d\nu_x(\lambda) dx = m$ の下で考える. 明らかに $\tilde{\mathbf{E}}_0(\underline{\delta}_u) = \mathbf{E}_0(u)$ (但し $\underline{\delta}_u = \{\delta_{u(x)}\}_{x \in \Omega}$) が成立.

$\tilde{\mathbf{E}}_0$ は下限 0 を達成する. 実際 minimizer は $\nu = \{m\delta_1 + (1-m)\delta_0\}_{x \in \Omega}$ で, このとき $v(x) \equiv 0, u(x) \equiv m$ となっている. もともとヤング測度はこのように変分原理を一般化するために導入されたものである.

4 微細パターンの構造

4.1 1次元の場合

$\Omega = (0, \ell)$, $\ell > 0$ の場合に, 微細パターン u^ε の構造を考察する. 命題 2 と同様の解析ができるが, ここでは繰り返しを避けてもっと

形式的に議論する. まず, $\bar{v} = \frac{1}{\ell} \int_0^\ell v$ を v の平均としたとき, v に対する方程式を積分して, $\gamma \bar{v} = \bar{u} - m$ となる. $\|v\|_{L^2}^2 = \|v - \bar{v}\|_{L^2}^2 + \|\bar{v}\|_{L^2}^2$ なので,

$$(4.1) \quad \mathbf{E}(u, \varepsilon) = \int_0^\ell \left\{ \frac{1}{2} \varepsilon^2 u_x^2 + F(u) + \frac{1}{2\gamma} (\bar{u} - m)^2 \right\} dx + \int_0^\ell \left\{ \frac{1}{2} v_x^2 + \frac{1}{2} \gamma (v - \bar{v})^2 \right\} dx$$

と表される. 第 1 項を「界面エネルギー」, 第 2 項を「相互作用エネルギー」と呼ぶ.

界面エネルギーを小さくするためには, u は 0 か 1 に近くかつその平均は m に近くなければならない. u が 0 から 1 へ変わる遷移層 (拡散的界面) は ε スケールである [6].

実際, 界面の近くで, $u(x) \sim Q(\pm(x-z)/\varepsilon)$, ただし, z は界面の位置, Q は遷移のプロファイルで, (2.5) の一意解である. 各遷移層の界面エネルギーはおおよそ $\sigma\varepsilon$ である. したがって, 界面の数が少ないほど, 全界面エネルギーは小さくなる.

一方, 相互作用エネルギーは, 相領域 ($u \sim 0$ または $u \sim 1$ のところ) の長さの 3 乗に比例する. 実際, 2 つの界面間の距離を l とし, v に関する方程式を $v'' = m + \gamma v - u \sim m$ or $m - 1$ で近似すると, 相互作用エネルギーはおおよそ $\frac{m^2(1-m)^2}{6} l^3$ となる. 故に, エネルギー密度 (界面エネルギーと相互作用エネルギーの和を長さで割ったもの) は

$$\frac{1}{l} \left(\sigma\varepsilon + \frac{m^2(1-m)^2}{6} l^3 \right)$$

で近似できる. これは $l \sim L^* \varepsilon^{1/3}$,

$$L^* = \left(\frac{3\sigma}{m^2(1-m)^2} \right)^{1/3}$$

のとき, 最小値

$$(4.2) \quad (\varepsilon\sigma)^{2/3} A_S(m), \quad A_S(m) := \frac{1}{2} [3m(1-m)]^{2/3}$$

をとることが容易にわかる. 従って微細構造は $\varepsilon^{1/3}$ のスケールであることが期待される. この微細パターンの構造について, 次の結果が得られる.

定理 2 ([9]) $\gamma = \gamma(\varepsilon) \in [0, \gamma_0]$ (γ_0 は固定定数) とする.

十分小さい $\varepsilon > 0$ に対して, 正の定数 $\ell^\varepsilon = L^* \varepsilon^{1/3} [1 + \mathcal{O}(1) \varepsilon^{1/3}]$, $\ell_n(\varepsilon) \in (n\ell^\varepsilon, (n+1)\ell^\varepsilon)$ ($n \geq 1$), $\ell_0(\varepsilon) = \ell_1(\varepsilon)/2$ が存在して, 次を満たす:

- (i) 各 $n \geq 1$ に対し、
- (a) $\ell \in (\ell_{n-1}(\varepsilon), \ell_n(\varepsilon))$ ならば、(4.1) は一意に minimizer を持ち、それは半周期 ℓ/n の関数である。
 - (b) $\ell = \ell_n(\varepsilon)$ ならば、(4.1) はちょうど 2 つ minimizer を持ち、一方は半周期 ℓ/n 、他方は半周期 $\ell/(n+1)$ の関数である。
- (ii) $n \geq 1$ に関して一様に、

$$\frac{\ell_n(\varepsilon)}{\ell^\varepsilon} = \left(n + \frac{1}{2}\right) \left[\frac{n^2 + n}{n^2 + n + 1/4} \right]^{2/3} + \mathcal{O}(1)\varepsilon^{1/3}$$

が成立する。

ここで、一意とは半周期の平行移動を除く一意性を意味する。但し、解は $(-\ell, \ell)$ に偶関数として拡張したあとさらに \mathbb{R} 全体へ周期的に拡張しておく。

4.2 2次元の場合

2次元の場合に、 $x \in \Omega$ のまわりでの $\varepsilon^{1/3}$ スケールの微細構造パターンを考える。実際の実験や数値シミュレーションで無数の水玉状の界面をもつ微細な周期構造が頻繁に現れることが以前から知られている (図 1)。しかし、これまで数学的な解析が行われたのは本質的に 1次元の問題である直線状界面の場合だけで、水玉状界面の厳密な解析はなされていなかった。直線状界面の周期的配列は「縞模様」であり、水玉状界面の周期的配列は「斑点模様」である。

空間 2次元でどのような微細構造パターンをもっているかを調べるために、簡約エネルギーを導入する。いろいろな斑点模様の中で、正六角形格子の構造が最小エネルギーを与えることがわかる。これにより、正六角形構造の斑点模様が頻繁に現れることの理論的裏付けを与えることができる。次に、斑点模様と縞模様とでエネルギーの比較をして、縞模様と斑点模様のどちらが現れやすいかを分ける m の臨界値を計算することができる。

4.2.1 斑点模様

微細構造パターンにおいては、領域 Ω は 2つの相領域 Ω_0 ($u \sim 0$) と Ω_1 ($u \sim 1$) に分かれ、その残りの領域がオーダー ε の薄い遷移層となっている。 $\Gamma := \{x \in \Omega \mid u(x) = 1/2\}$ を界面とみなす。Modica-Mortola の定理 ([25, 40]) より、

$$\int_{\Omega} \left\{ \frac{\varepsilon^2}{2} |\nabla u|^2 + F(u) \right\} dx \sim \varepsilon \sigma |\Gamma|.$$

但し、 $|\Gamma|$ は Γ の長さを表す。これは、次の汎関数 \mathcal{E} を考察することが自然であることを示唆している。

$$(4.3) \quad \mathcal{E}(u, \varepsilon) = \varepsilon \sigma \|Du\|(\Omega) + \frac{1}{2} \int_{\Omega} (|\nabla v|^2 + \gamma v^2) dx.$$

但し, u は, 特性関数のクラス

$$Y(\Omega, m) = \{u \in BV(\Omega) \mid F(u) = 0 \text{ a.e. in } \Omega, \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} u = m\}$$

上で考え, $\|Du\|(\Omega)$ は, u の全変動を表す.

$m \in (0, 1/2]$ として, 空間周期的な斑点模様

$$u \approx \sum \chi_{B(z_i, r)}$$

を考える. ただし, $B(z, \rho)$ は半径 ρ , 中心 z の円板で, χ_B は B の特性関数とする. z_i は二重周期的に配列されていて, 面積が $|D| = \pi r^2/m$ の多角形 D に対し,

$$\mathbb{R}^2 = \bigcup_i \bar{D}_i, \quad D_i = \{z_i + y \mid y \in D\}, \quad D_i \cap D_j = \emptyset \text{ if } i \neq j$$

が満たされているとしよう.

このとき, 近似式

$$v(x) \approx m |D| V(x/\sqrt{|D|})$$

により,

$$(4.4) \quad \mathcal{E}(u, \varepsilon) \approx \frac{|\Omega|}{|D|} \left\{ 2\pi r \varepsilon \sigma + m^2 |D|^2 A(D, m) \right\}$$

となることが期待できる. ここで,

$$A(D, m) := \frac{1}{2} \int_{\hat{D}} (\gamma |D| V^2 + |\nabla V|^2) dy, \quad \hat{D} = \frac{D}{\sqrt{|D|}},$$

V は

$$-\Delta V + \gamma |D| V = \frac{1}{m} \sum_i \chi_{B(z_i/\sqrt{|D|}, r/\sqrt{|D|})} - 1 \quad \text{in } \mathbb{R}^2$$

の一意的有界解である.

ε が小さいとき, (4.4) の右辺は \hat{D} が正六角形で

$$|D| \approx \frac{\pi}{m} \left(\frac{\varepsilon \sigma}{A^*(m) + \mu(D_6)} \right)^{2/3}$$

のとき最小値

$$(4.5) \quad \mathcal{E}(u, \varepsilon) \approx (\varepsilon \sigma)^{2/3} |\Omega| A_D(m)$$

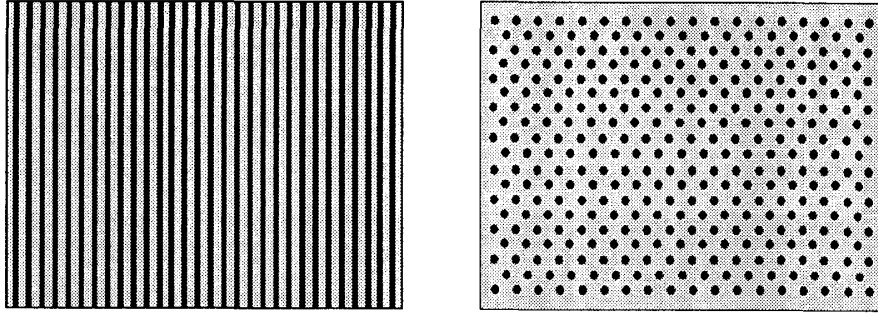


図 1: 2次元における縞模様と斑点模様

をとることが示される [10]. 但し,

$$A_D(m) = 3m [A^*(m) + \mu(D_6)]^{1/3},$$

$$A^*(m) = \frac{m - 1 - \log m}{8},$$

$$\mu(D_6) = \pi R(e^{\pi i/3}) + \frac{3/2 - \log(4\pi)}{8} = 0.000312 \dots,$$

$$R(\zeta) = -\frac{1}{4\pi} \log \left| \sqrt{\text{Im}(\zeta)} e^{\pi i \zeta/6} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - e^{2n\pi i \zeta})^2 \right|, \quad \zeta \in \mathbb{C}, \text{Im}(\zeta) > 0.$$

次に, $m \in (1/2, 1)$ のときは $u = 1$ と $u = 0$ を入れ替えた斑点模様を考えて $A_D(m) = A_D(1 - m)$ と定義する.

ここでも, 2つのスケールが存在することに注意する.

(1) 界面領域の厚さを特徴付ける $\mathcal{O}(\varepsilon)$ スケール: 簡約エネルギー汎関数 $\mathcal{E}(u, \varepsilon)$ が元の汎関数 $\mathbf{E}(u, \varepsilon)$ のよい近似になっていることを保証する.

(2) 局所平均が m となる u の局所振動の周期を特徴づける $\mathcal{O}(\varepsilon^{1/3})$ スケール.

4.2.2 縞模様と斑点模様

(4.2), (4.5) より, A_S, A_D が縞模様と斑点模様それぞれの正規化したエネルギー密度と考えられる. A_S と A_D のグラフから, 次がわかる.

- (i) $m < 0.3548$ または $m > 0.6452$ のとき, $A_D < A_S$ より斑点模様が期待される.
- (ii) $0.3548 < m < 0.6452$ のとき, $A_D > A_S$ より縞模様が期待される.

参考文献

- [1] G. ALBERTI AND S. MÜLLER, *A new approach to variational problems with multiple scales*, Comm. Pure Appl. Math., 54 (2001), pp. 761–825.

- [2] D. G. ARONSON AND H. F. WEINBERGER, *Nonlinear diffusion in population genetics, combustion, and nerve pulse propagation*, in Partial Differential Equations and Related Topics, Lecture Notes in Math. 446, Springer, New York, 1975, pp. 5–49.
- [3] BAHIANA AND OONO, *Cell dynamical system approach to block copolymers*, Phys. Rev., 41 (1990), pp. 6763–6771.
- [4] F. S. BATES AND G. H. FREDRICKSON, *Block Copolymers-Designer soft materials*, Physics Today, 32 (1999), 32–38.
- [5] A. BONAMI, D. HILHORST, AND E. LOGAK, *Modified motion by mean curvature: Local existence and uniqueness and qualitative properties*, Differential Integral Equations, 13 (2000), pp. 1371–1392.
- [6] J. CARR, M. E. GURTIN AND M. SLEMROD, *Structured phase transitions on a finite interval*, Arch. Ration. Mech. Anal., 86 (1984), pp. 317–351.
- [7] X. CHEN, *Generation and propagation of interfaces in reaction-diffusion systems*, Trans. Amer. Math. Soc., 334 (1992), pp. 877–913.
- [8] X. CHEN, D. HILHORST, AND E. LOGAK, *Asymptotic behavior of solutions of an Allen-Cahn equation with a nonlocal term*, Nonlinear Anal., 28 (1997), pp. 1283–1298.
- [9] X. CHEN AND Y. OSHITA, *Periodicity and uniqueness of global minimizers of an energy functional containing a long-range interaction*, preprint.
- [10] X. CHEN AND Y. OSHITA, *An application of the modular function in interfacial dynamics*, preprint.
- [11] R. CHOKSI, *Scaling laws in microphase separation of diblock copolymers*, J. Nonlinear Sci., 11 (2001), pp. 223–236.
- [12] R. CHOKSI, R. KOHN, AND F. OTTO, *Domain branching in uniaxial ferromagnets: A scaling law for the minimum energy*, Comm. Math. Phys., 201 (1999), pp. 61–79.
- [13] R. CHOKSI AND X. F. REN, *On the derivation of a density functional theory for microscopic separation of diblock copolymers*, J. Statistical Physics, 113 (2003), pp. 151–176.
- [14] G. B. ERMENTROUT, S. P. HASTINGS, AND W. C. TROY, *Large amplitude stationary waves in an excitable lateral-inhibitory medium*, SIAM J. Appl. Math., 44 (1984), pp. 1133–1149.
- [15] P. C. FIFE, *Dynamics of Internal Layers and Diffusive Interfaces*, CBMS-NSF Regional Conf. Ser. in Appl. Math. 53, SIAM, Philadelphia, 1988.

- [16] P. FIFE AND D. HILHORST, *The Nishiura-Ohnishi Free Boundary Problem in the 1D case*, SIAM J. Math. Anal., 33 (2001), pp. 589–606.
- [17] P. C. FIFE AND L. HSIAO, *The generation and propagation of internal layers*, Nonlinear Anal., 12 (1988), pp. 19–41.
- [18] I. W. HAMLEY, *The Physics of Block Copolymers*, Oxford University Press, Oxford, England, 1999.
- [19] T. HASHIMOTO, M. SHIBAYAMA, AND H. KAWAI, *Domain-Boundary Structure of Styrene-Isoprene Block Copolymer Films Cast from Solution. 4. Molecular-Weight Dependence of Lamellar Microdomains*, Macromolecules, 13 (1980), pp. 1237–1247.
- [20] M. HENRY, D. HILHORST, AND Y. NISHIURA, *Singular limit of a second order nonlocal parabolic equation of censored type arising in the micro-phase separation of diblock copolymers*, Hokkaido Mathematical Journal, Vol. XXXII (2003), pp. 561–622.
- [21] G. A. KLAASEN AND W. C. TROY, *Stationary wave solutions of a system of reaction-diffusion equations derived from the FitzHugh-Nagumo equations*, SIAM J. Appl. Math., 44 (1984), pp. 96–110.
- [22] L. LEIBLER, *Theory of Microphase Separation in Block Copolymers*, Macromolecules, 13 (1980), pp. 1602–1617.
- [23] E. LOGAK, *Singular limit of reaction-diffusion systems and modified motion by mean curvature*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A, 132 (2002), pp. 951–973.
- [24] M. MIMURA AND K. KAWASAKI, *Spatial segregation in competitive interaction-diffusion equations*, J. Math. Biol., 9 (1984), pp. 49–64.
- [25] L. MODICA, *The gradient theory of phase transitions and the minimal interface criterion*, Arch. Ration. Mech. Anal., 98 (1987), pp. 123–142.
- [26] S. MÜLLER, *Singular perturbations as a selection criterion for periodic minimizing sequences*. Calc. Var. Partial Differential Equations, 1 (1993), No. 2, pp. 169–204.
- [27] S. MÜLLER AND G. WEISS, *private communication*, 1996.
- [28] Y. NISHIURA, *Dynamics Reported (New Series)*, Vol. 3, Springer, Berlin, 1994.
- [29] 西浦 廉政, 非線形問題 1—パターン形成の数理, 岩波講座・現代数学の展開 5, 岩波書店 (1999).
- [30] Y. NISHIURA AND I. OHNISHI, *Some mathematical aspects of the micro-phase separation in diblock copolymers*, Phys. D, 84 (1995), pp. 31–39.
- [31] Y. NISHIURA AND H. SUZUKI, *Nonexistence of higher dimensional stable turing*

- patterns in the singular limit*, SIAM J. Math. Anal., 29 (1998), pp. 1087–1105.
- [32] I. OHNISHI, Y. NISHIURA, M. IMAI, AND Y. MATSUSHITA, *Analytical solution describing the phase separation driven by a free energy functional containing a long-range interaction term*, Chaos, 9 (1999), pp. 329–341.
- [33] T. OHTA AND K. KAWASAKI, *Equilibrium morphology of block copolymer melts*, Macromolecules, 19 (1986), pp. 2621–2632.
- [34] Y. OSHITA, *On stable stationary solutions and mesoscopic patterns for FitzHugh-Nagumo equations in higher dimensions*, J. Differential Equations, 188 (2003), pp. 110–134.
- [35] Y. OSHITA, *Stable stationary patterns and interfaces arising in reaction-diffusion systems*, SIAM J. Math. Anal., 36 (2004), pp. 479–497.
- [36] P. PEDREGAL, *Parametrized measures and variational Principles*, Progress in Nonlinear Partial Differential Equations, Birkhäuser, Basel, 1977.
- [37] X. REN AND J. WEI, *Concentrically layered energy equilibria of the di-block copolymer problem*, European J. Appl. Math., 13 (2002), pp. 479–496.
- [38] X. REN AND J. WEI, *On energy minimizers of the diblock copolymer problem*, Interfaces and Free Boundaries, 5 (2003), pp. 193–238.
- [39] X. REN AND J. WEI, *On the spectra of three-dimensional lamellar solutions of the Diblock copolymer problem*, SIAM J. Math. Anal., 35 (2003), No. 1, pp. 1–32.
- [40] P. STERNBERG, *The effect of a singular perturbation on nonconvex variational problems*, Arch. Ration. Mech. Anal., 101 (1988), pp. 209–260.
- [41] H. SUZUKI, *Asymptotic characterization of stationary interfacial patterns for reaction diffusion systems*, Hokkaido Math. J., Vol. 26, No. 3, pp. 631–667, 1997.
- [42] H. SUZUKI, *Construction and stability of stationary interfacial patterns in rescaled reaction diffusion systems*, In Proceedings of the International Conference on Asymptotics in Nonlinear Diffusive Systems (Sendai, 1997), Vol. 8 of Tohoku Math. Publ., pp. 257–262, Sendai, 1998. Tohoku Univ.
- [43] M. TANIGUCHI AND Y. NISHIURA, *Instability of planar interfaces in reaction-diffusion systems*, SIAM J. Math. Anal., Vol. 25, No. 1, pp. 99–134, 1994.